Análise Numérica

Nelson Mulemba

Localização de Zeros de Funções reais.

Maputo, August 5, 2024

Índice

Nesta secção, vamos estudar procedimentos para encontrar zeros de funções reais, ou seja, os valores de x para os quais $f(x) = 0$.
Encontrar esses zeros é uma tarefa fundamental em matemática e suas aplicações práticas, pois frequentemente representam soluções de equações, pontos de equilíbrio e condições óptimas em diversos contextos.
Encontrar os zeros de funções é crucial porque:

- **Resolução de Problemas**: Muitos problemas podem ser formulados como a busca por zeros de funções.
- **Otimização**: Identificar pontos onde a função atinge valores específicos pode ser necessário para otimizar processos.
- **Modelagem Matemática**: Soluções de modelos matemáticos frequentemente envolvem a determinação de zeros.

Zero de uma função

Definição

Um zero de uma função real $f(x)$ é um valor $x = a$ tal que $f(a) = 0$, ou seja, é o ponto onde o gráfico da função intercepta o eixo x.

Graficamente os zeros de uma funções real encontram-se nos pontos em que seu gráfico corta o eixos Ox.

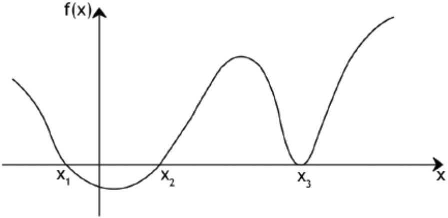


Figura : Zeros reais de uma função real

Métodos de Busca de Raízes

Os **Métodos de Busca de Raízes** seguem dois passos principais:

Passo 1: Isolamento ou Localização dos Zeros

Este passo consiste em identificar intervalos, que podem ser abertos ou fechados, $[a, b]$, onde cada intervalo contém pelo menos um zero da função f. Essa etapa é crucial para restringir a busca e garantir que estamos próximos dos zeros da função.

Passo 2: Refinamento

Uma vez que os intervalos contendo os zeros são identificados, utiliza-se uma técnica de refinamento para aprimorar a precisão da solução. Esse processo envolve a aplicação de métodos que iterativamente aproximam o valor do zero até que a precisão desejada seja alcançada.

Métodos a serem estudados

1. Método Analítico:
2. Método Gráfico:
3. Método da Bisseção:
4. Método de Newton-Raphson:
5. Método da Secante:

Isolamento de Zeros Reais / Método Analítico

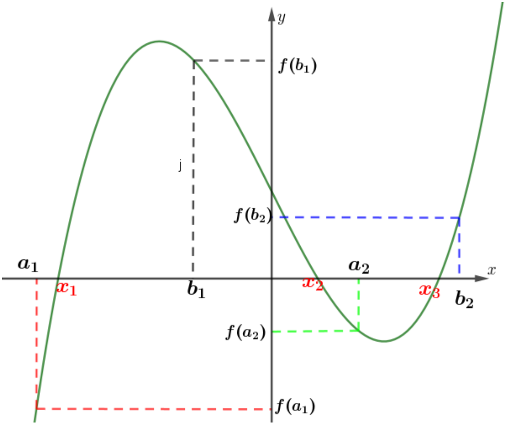
Teorema de Bolzano

Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então f possui pelo menos um zero no intervalo aberto (a, b). Ou seja, se a função muda de sinal entre a e b (isto é, se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos), então existe pelo menos um ponto c dentro do intervalo onde a função f é igual a zero.

Observação

Além disso, se a função f é contínua no intervalo $[a, b]$ e sua derivada f' existe e não muda de sinal no intervalo aberto (a, b), então o zero encontrado em (a, b) é único.
Isto é, se a derivada da função f é sempre positiva ou sempre negativa, então a função só pode cruzar o eixo x uma vez nesse intervalo. Isso garante que o zero encontrado é o único no intervalo.

Ilustração do Método Analítico (Teorema de Bolzano)



Isolamento de zeros reais/ Método Analítico

Exemplo. Determine um intervalo onde $f(x) = x^3 - 3x + 1$ tem um único zero.

- f é contínua em $\mathbb{R}$;
- Vamos construir uma tabela com valores de f para alguns valores de x:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3
sinal	-	+	+	-	+

- f tem zeros nos intervalos $[-2, -1]$, $[0, 1]$ e $[1, 2]$;
- $f'(x) = 3x^2 - 3$
  - $f'(x) > 0$ para $x \in (-2, -1)$ e $x \in (1, 2)$, logo existe uma única raíz em $[-2, 1]$ e em $x \in (1, 2)$;
  - $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 1)$, logo existe uma única raíz em $[0, 1]$;

Método Gráfico

Método Gráfico

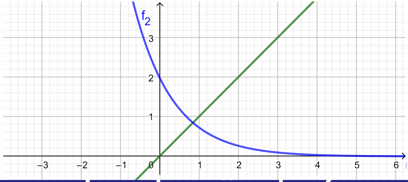
Este método consiste em separar a equação em duas funções simples e elementares, esboçar os gráficos dessas duas funções e encontrar os pontos de cruzamento. Esses pontos de cruzamento correspondem aos zeros da função original, fornecendo uma estimativa visual inicial para soluções mais precisas com outros métodos numéricos.

Partindo da equação $f(x) = 0$, obtem-se uma equação equivalente $f_1(x) = f_2(x)$, em que f_1 e f_2 sejam funções de análise gráfica fácil.

Isolamento de zeros reais/ Método gráfico

Exemplo. Determine um intervalo onde $f(x) = -x + 2e^{-x}$ tem um único zero.

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2e^{-x}$;
- Isolar os zeros de f é equivalente a obter intervalos cada um dos quais contendo abscissa de um dos pontos de intersecção dos gráficos de $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = 2e^{-x}$;
- Dos gráficos de f_1 e f_2, podemos concluir que f tem um zero no intervalo $[0, 1]$.



Exercícios

Localize os zeros das seguintes funções abaixo

- $f(x) = -x + 2e^{-x}$ Método analítico
- $f(x) = x\ln(x) - 2$ Método gráfico


GARANTE O TEU FUTURO
COM UMA FORMAÇÃO SÓLIDA
ISUTC
Prolong. da Av. Kim Il Sung (IFT/TDM) Edifício D1
Maputo, Moçambique
www.facebook.com/isutc
www.transcom.co.mz/isutc